

# MINICURSO

## Atratores Helicoidais em Variedades de Contato

Um estudo numérico e formalizado do sistema  $dm^3$

Grossi, Pablo Nogueira<sup>1</sup>

**Resumo:** Este minicurso apresenta um estudo dirigido de um sistema de EDO tridimensional sobre uma variedade de contato  $(M, \xi)$ , em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , cujo conjunto limite é uma hélice — a órbita de Reeb sobre o cilindro unitário  $r = 1$ . O sistema  $dm^3$  combina a forma normal de Hopf  $r(1 - r^2)$  com um acoplamento  $\varepsilon(r - 1)e^{-z}$  que decai exponencialmente com a altura. O resultado principal: para toda condição inicial com  $r(0) > 1$ , a trajetória converge exponencialmente à hélice com taxa  $\mu \rightarrow -2$ , enquanto  $z(t)$  cresce linearmente. Experimentos numéricos de alta precisão (DOP853,  $rtol=10^{-10}$ ) confirmam o atrator e corrigem a estimativa simétrica de Gronwall,  $|r - 1| < 1/3$ : a fronteira interna real da bacia é assímetria, em  $r_* \approx 0,80$ . O curso conecta o estudo com a formalização em Lean 4 / Mathlib 4 (projeto AXLE), exibindo a cadeia  $G = U \circ F \circ K \circ C$  e a obrigação  $\kappa$ -Lipschitz ainda em aberto. Pré-requisitos: EDO a nível de graduação.

**Palavras-chave:** variedades de contato; atratores helicoidais; estabilidade exponencial; sistemas dinâmicos; verificação formal.

## 1 INTRODUÇÃO

Uma *variedade de contato* de dimensão 3 é um par  $(M, \xi)$  em que  $\xi = \ker \alpha$  é um campo de planos totalmente não-integrável,  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ . O protótipo é  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(r, \theta, z)$  e  $\alpha = dz - r^2 d\theta$ ; o campo de Reeb é  $R = \partial_z$ , e qualquer curva sobre  $r = 1$  com  $\dot{\theta} = \dot{z} = 1$  é uma órbita de Reeb — a hélice modelo  $\Gamma$ . A não-integrabilidade força limites periódicos planos a virarem *hélices* em dimensão 3.

O curso usa essa geometria para estudar um sistema dissipativo cujo atrator é uma hélice — o sistema  $dm^3$ . Objetivos: (i) introduzir geometria de contato via exemplo resolvido; (ii) enunciar um teorema de convergência exponencial; (iii) mostrar como experimentos numéricos rigorosos *corrigem* estimativas analíticas (o raio de Gronwall); (iv) conectar à verificação formal em Lean 4 via o projeto AXLE.

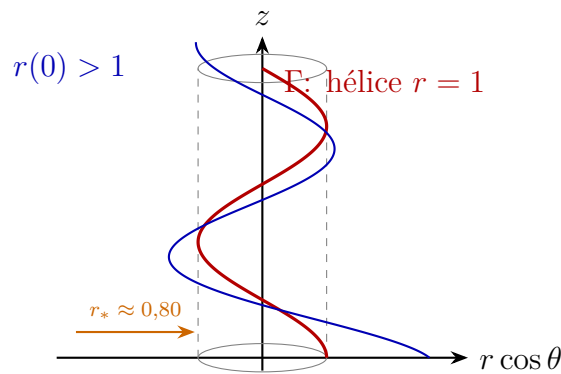
<sup>1</sup>G6 LLC, Newark, New Jersey, EUA. ORCID: 0009-0000-6496-2186. Contato: pablo@g6-llc.com.

## 2 O SISTEMA $DM^3$ E O TEOREMA PRINCIPAL

Consideramos o sistema autônomo, com  $\varepsilon = 2$  ao longo de todo o curso:

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \varepsilon(r - 1)e^{-z}, \quad \dot{\theta} = 1, \quad \dot{z} = r^2 - \varepsilon(r - 1)^2 e^{-z}. \quad (1)$$

A equação radial é a forma normal de Hopf,  $r(1 - r^2)$ , mais um acoplamento  $\varepsilon(r - 1)e^{-z}$  que se anula em  $r = 1$  e decai com  $z$ . A rotação é uniforme; ao longo de  $r \approx 1$ ,  $\dot{z} \approx 1$ , produzindo crescimento linear em  $z$ .



**Fig. 1:** Atrator helicoidal  $\Gamma$  sobre o cilindro unitário  $r = 1$ . Uma trajetória com  $r(0) > 1$  (azul) espirala radialmente em direção a  $\Gamma$  (vermelho) enquanto ascende em  $z$ ; a fronteira interna da bacia está em  $r_* \approx 0,80$ , não em  $r = 2/3$ .

**Teorema 2.1 (Atrator helicoidal, bacia externa)** *Seja  $(r(t), \theta(t), z(t))$  solução de (1) com  $r(0) > 1$ . Então: (i)  $|r(t) - 1| \rightarrow 0$  exponencialmente, com  $\mu \rightarrow -2$  quando  $z \rightarrow \infty$ ; (ii)  $\dot{z}(t) \rightarrow 1$  e  $z(t)$  é estritamente monótona crescente para  $t$  grande; (iii) a trajetória converge em  $C^0$  à hélice de Reeb  $\Gamma = \{r = 1, \dot{z} = 1\}$ .*

**Esboço.** A linearização em  $r = 1$  tem autovalor  $-2$ ; o termo  $\varepsilon(r - 1)e^{-z}$  desaparece no limite  $z \rightarrow \infty$ , de modo que o expoente *assintótico* é exatamente  $\mu = -2$ . Um argumento de Gronwall dá contração transversal desde que  $|r - 1| < \varepsilon_0 = 1/3$ . Pré-compactness e invariância de  $\{r > 1\}$  (que se verifica diretamente em (1)) estendem a conclusão para toda a bacia externa.

## 3 ACHADOS NUMÉRICOS E CORREÇÃO DA BACIA

Integramos (1) com DOP853 ( $\text{rtol} = 10^{-10}$ ,  $\text{atol} = 10^{-12}$ ) e ajustamos  $\log |r(t) - 1|$  por mínimos quadrados em  $t \in [0,5; 5]$ . Os resultados (Tab. 1) confirmam a convergência e mostram que  $\mu$  tende a  $-2$  *por baixo* conforme  $\varepsilon = r(0) - 1$  cresce.

A correção pedagógica central do curso: a bola simétrica  $|r - 1| < 1/3$  classifica como convergentes trajetórias com  $r(0) \in (2/3, 0,80)$  que de fato escapam para  $z \rightarrow -\infty$  em tempo finito, devido à amplificação exponencial de  $e^{-z}$  quando  $z$  cai. O enunciado correto é assimétrico.

$r(0) - 1$	taxa $\hat{\mu}$	$r(0)$	$\min \dot{z}$
+0,10	-1,849	0,90	+0,15
+0,33	-1,890	0,80	-0,02 (limiar)
+0,50	-1,907	0,70	-0,18 (colapsa)
+1,00	-1,932	0,50	-0,48 (colapsa)
+1,50	-1,959	0,30	-0,93 (colapsa)

**Tab. 1:** Taxa de decaimento radial (esq.) e monotonicidade de  $z$  (dir.) em 24 órbitas. Bacia externa converge uniformemente; fronteira interna empírica em  $r_* \approx 0,80$ , não em  $2/3$  como preveria o raio simétrico de Gronwall.

## 4 FORMALIZAÇÃO EM LEAN 4 E ESTRUTURA DO MINICURSO

O projeto AXLE (Lean 4 + Mathlib 4, zero axiomas adicionais) formaliza a cadeia  $G = U \circ F \circ K \circ C$  dos operadores Compress, Threshold, Fold, Unfold como estruturas sobre espaços métricos/normados. O teorema central *Spiral Return* é enunciado; a obrigação-chave em aberto é `kappa_lipschitz` (AXLE Issue #12), que fecharia a versão formal do Teorema 2.1.

O minicurso terá três sessões de 60 min: (S1) geometria de contato e o sistema  $dm^3$ , com simulador interativo na web; (S2) teorema principal, esboço da prova de Gronwall e revisão crítica do raio  $\varepsilon_0 = 1/3$  via bacia assimétrica; (S3) esqueleto Lean 4: inspeção de `Chain.lean`, discussão da `sorry` aberta e convite à contribuição. Pré-requisitos: EDO a nível de graduação; Lean 4 não é pressuposto. Todo o material — código Python, figuras, fontes L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e Lean — está em acesso aberto em <https://github.com/TOTOGT/GTCT> e em <https://totogt.github.io/3M/>, com DOI 10.5281/zenodo.19117400.

## 5 CONCLUSÕES

O  $dm^3$  reúne, em um exemplo enxuto, três ideias raramente acopladas na graduação: geometria de contato como moldura para sistemas com rotação persistente; integração numérica de alta precisão como correção de estimativas analíticas; e verificação formal em Lean 4. A bacia interna assimétrica ( $r_* \approx 0,80$ , não 0,75) permanece um problema aberto para iniciação científica. *Seu estudo é seu. Ninguém pode tirá-lo de você.*

## Bibliografia

- [1] GEIGES, H. **An Introduction to Contact Topology**. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [2] HAIRER, E.; NØRSETT, S. P.; WANNER, G. **Solving ODEs I: Nonstiff Problems**. 2. ed. Berlin: Springer, 1993.
- [3] HARTMAN, P. **Ordinary Differential Equations**. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2002.
- [4] THE MATHLIB COMMUNITY. **Mathlib4 Documentation**, 2024. [https://leanprover-community.github.io/mathlib4\\_docs/](https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/).
- [5] GROSSI, P. N. **Helical Attractors on Contact 3-Manifolds**. Principia Orthogona Vol. IV (GTCT T1). G6 LLC, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19117400.