Helical Attractors on Contact 3-Manifolds

A Toy ODE Study on $(\mathbb{R}^3, \alpha = dz - r^2\, d\theta)$

Pablo Nogueira Grossi
G6 LLC • Newark, NJ
brodananda@gmail.com • ORCID: 0009-0000-6496-2186

Submissão (Pôster · Long Abstract) à XII Bienal da SBM — UFRN, Natal-RN — 2026

Modalidade e Categoria

Modalidade: Pôster — Long Abstract (3 páginas). **Código de tema:** T10 (Geometria e Topologia: variedades de contato, sistemas dinâmicos, formalização). **Material digital complementar (*living book*):** `https://totogt.github.io/3M/`.

English Abstract

We introduce a one-parameter toy ODE on the contact 3-manifold $(\mathbb{R}^3, \alpha)$ with contact form $\alpha = dz - r^2\, d\theta$ and Reeb field $R = \partial_z$. Writing a state as $(r, \theta, z) \in (0, \infty) \times S^1 \times \mathbb{R}$, the system — which we call dm^3 — is

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \varepsilon(r - 1)\, e^{-z}, \qquad \dot{\theta} = 1, \qquad \dot{z} = r^2 - \varepsilon(r - 1)^2\, e^{-z}, \tag{1}$$

with fixed coupling $\varepsilon = 2$. The cylinder $\Gamma = \{r = 1\}$ is invariant and carries the helical flow $\dot{\theta} = 1$, $\dot{z} = 1$, a lift of the Reeb orbit; the question is whether Γ attracts.

Main result (Theorem 2.1). Let $u(t) = r(t) - 1$. For any initial data with $|u(0)| < 1/3$ and $z(0) \geq \log 2$, the solution exists for all $t \geq 0$ and satisfies

$$|u(t)| \leq |u(0)|\, e^{-2t} \quad \text{for all } t \geq 0,$$

so every such orbit converges exponentially to Γ at the rate $\mu = -2$ given by the Jacobian eigenvalue of the radial part at $r = 1$. The proof is a Gronwall argument: squaring the radial equation yields $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2 \leq -2u^2 - 3u^3 - u^4 + \varepsilon u^2 e^{-z}$, and the bound on $z(0)$ forces the last term to be dominated by the quadratic on the relevant window.

Numerical findings (Table 1). A DOP853 integrator at rtol $= 10^{-10}$, atol $= 10^{-12}$ confirms the rate and, more importantly, reveals *asymmetry*: the outer basin $r(0) > 1$ converges for every tested initial condition up to $r(0) = 2.5$, while the inner basin $r(0) < 1$ converges only for $r(0) \geq 0.80$. The collapse threshold $r_\star \approx 0.80$ is strictly stricter than the Gronwall ball $\varepsilon_0 = 1/3$ (which would give $r(0) \in (2/3, 4/3)$), a gap between theory and numerics that is itself the object of the chapter's Conjecture 2.2.

Contact-geometric reading. The asymmetry $r_\star \neq 2 - r_\star$ is diagnostic: it is the fingerprint of the coupling term $\varepsilon(r-1)^2 e^{-z}$ in $\dot{z}$, which is *not* symmetric under $u \mapsto -u$ because it couples to the non-integrable direction of α. A symmetric basin would indicate that the attractor is reducible to a 2D problem transverse to R; the observed asymmetry indicates that the full 3-manifold contact structure is essential to the convergence.

Reproducibility. All numerics reproduce via a public Python/DOP853 lab; a Lean 4 skeleton (AXLE Issue #12) isolates the one nontrivial obligation (a Lipschitz bound on the coupling operator). Eight chapters of the book develop the framework and formalisation path; the present abstract reports Chapter 2.

Outer basin $r(0) > 1$			**Inner basin** $r(0) < 1$		
$r(0)-1$	$\hat{\mu}$	outcome	$r(0)$	$\dot{z}(0.3)$	outcome
+0,10	−1,849	conv.	0,90	+0,15	conv.
+0,33	−1,922	conv.	0,80	+0,03	*limiar*
+0,50	−1,948	conv.	0,70	−0,24	collapses
+1,00	−1,961	conv.	0,50	−0,62	collapses
+1,50	−1,959	conv.	0,30	−0,93	collapses

Table 1: Table 1 of the chapter. Empirical contraction rate $\hat{\mu}$ (slope of $\log|r(t)-1|$ on $t \in [5,15]$) and early vertical velocity $\dot{z}(0{,}3)$ as inner-basin diagnostic. Note $\hat{\mu} \to -2$ from above and the inner edge $r_\star \approx 0{,}80 > 2/3$.

Resumo (em Português)

Apresentamos uma ODE-brinquedo de um parâmetro na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \alpha)$, com forma de contato $\alpha = dz - r^2\, d\theta$ e campo de Reeb $R = \partial_z$. O sistema dm^3 está dado pela equação (1), com $\varepsilon = 2$. O cilindro $\Gamma = \{r = 1\}$ é invariante e carrega o fluxo helicoidal $(\dot{\theta}, \dot{z}) = (1, 1)$, um levantamento da órbita de Reeb.

O *Teorema 2.1* afirma que, para condições iniciais $|r(0) - 1| < 1/3$ e $z(0) \geq \log 2$, as trajetórias convergem exponencialmente a Γ à taxa $\mu = -2$, dada pelo autovalor jacobiano radial em $r = 1$. A demonstração combina Gronwall com um controle explícito do termo de acoplamento $\varepsilon(r-1)e^{-z}$.

A integração numérica (DOP853, $\mathrm{rtol} = 10^{-10}$) reproduz a taxa e revela uma *assimetria de bacia*: a bacia externa ($r(0) > 1$) converge em todos os testes até $r(0) = 2{,}5$, enquanto a interna ($r(0) < 1$) colapsa abaixo de $r(0) \approx 0{,}80$, com convergência confirmada para $r(0) \geq 0{,}80$. O limiar $r_\star \approx 0{,}80$ é estritamente mais estrito do que o raio de Gronwall $\varepsilon_0 = 1/3$. Essa assimetria é diagnóstica da estrutura de contato: indica que a convergência depende da direção não-integrável de α, e não se reduz a uma análise 2D transversal ao campo de Reeb.

Contribuição do pôster. (i) Formalização explícita do sistema dm^3 como levantamento natural da órbita de Reeb; (ii) prova auto-contida do Teorema 2.1 com constante ε_0 ótima dentro da técnica; (iii) tabela numérica reprodutível e identificação do gap $r_\star > \varepsilon_0$ como *conjectura aberta* (Conjectura 2.2 do capítulo); (iv) um esqueleto Lean 4 (AXLE, Issue #12) que isola a única obrigação não-trivial da formalização.

Materiais Digitais — *Living Book*

O pôster é a porta de entrada de um *livro vivo* completo, que desenvolve o programa em oito capítulos:

1. **Publisher hub:** `https://totogt.github.io/3M/` — capa, DOI, ladrilhos de capítulos, simulador 3D embutido.
2. **Capítulo E (GTCT para Todos):** `https://totogt.github.io/3M/chE-gtct.html` — nove axiomas, quatro teoremas, doze operadores.
3. **Minicurso (3 sessões de 60 min):** `https://totogt.github.io/3M/sessions/` — S1 geometria de contato, S2 Teorema 2.1 e bacia assimétrica, S3 esqueleto Lean 4.

4. **Simulador 3D (Three.js):** `https://totogt.github.io/3M/sims/helical-attractor.html`.
5. **Laboratório numérico (Python/DOP853):** `https://github.com/TOTOGT/3M/blob/main/labs/dm3_numeric.py` — reproduz a Tabela 1.
6. **Formalização (Lean 4 / Mathlib 4):** `https://github.com/TOTOGT/AXLE` — Issue #12 (`kappa_lipschitz`).

Bibliografia (mínima)

[1] GROSSI, P. N. Helical Attractors on Contact 3-Manifolds. In: *Principia Orthogona*, Vol. IV. G6 LLC, 2026. `https://totogt.github.io/3M/`.

[2] GEIGES, H. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge: CUP, 2008.

[3] HAIRER, E.; NøRSETT, S. P.; WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I*. 2. ed. Springer, 1993 (DOP853).

[4] MATHLIB 4 COMMUNITY. *Mathlib*. `https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs`.

Submissão à XII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. UFRN, Natal-RN, 3–7 de agosto de 2026. Categoria: Pôster (Long Abstract, 3 pp.). Código T10 (Geometria e Topologia; ajustar conforme portal). Companion submissions: OF_T2 (Oficina: Escada de Recorrência), CO_T2 (Comunicação Oral: Princípio do Cajueiro).