

MINICURSO

Atratores Helicoidais em Variedades de Contato: Estabilidade de Gronwall Refinada e Retorno em Espiral em Sistemas dm^3

*Helical Attractors on Contact 3-Manifolds:
Refined Gronwall Stability and Spiral Return in dm^3 Systems*

Grossi, Pablo Nogueira

G6 LLC, Newark, NJ, EUA · ORCID 0009-0000-6496-2186 · pablo@g6-llc.com

Resumo.

Este minicurso apresenta um estudo dirigido de um sistema de EDO tridimensional sobre uma variedade de contato (M, ξ) em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , cujo conjunto-limite é uma hélice — a órbita de Reeb sobre o cilindro unitário $r = 1$. O sistema dm^3 combina a forma normal de Hopf $r(1 - r^2)$ com um acoplamento $\varepsilon(r - 1)e^{-r}$, que decai exponencialmente com a altura. **Resultado principal (Teorema 2.1):** para toda condição inicial com $r(0) > 1$, a trajetória converge exponencialmente à hélice com taxa $\mu \rightarrow -2$, enquanto $z(t)$ cresce linearmente. **Correção da estimativa de Gronwall:** a bola simétrica $|r - 1| < 1/3$ superestima a bacia interna. A fronteira interna real é $r^* \approx 0,80$ (não $2/3 \approx 0,667$). O limitante global de Lipschitz do operador K é $\kappa \leq \sqrt{7/9} \approx 0,882$. O curso conecta o estudo à formalização em Lean 4/Mathlib4 (projeto AXLE). Pré-requisitos: EDO a nível de graduação.

Palavras-chave: variedades de contato · atratores helicoidais · estabilidade exponencial · desigualdade de Gronwall · assimetria de bacia · retorno em espiral · verificação formal Lean 4

1. Introdução

Uma *variedade de contato* de dimensão 3 é um par (M, ξ) em que $\xi = \ker \alpha$ é um campo de planos totalmente não-integrável, satisfazendo $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ em todo ponto. O protótipo é \mathbb{R}^3 com coordenadas (r, θ, z) e forma de contato $\alpha = dz - r^2 d\theta$; o campo de Reeb é $R = \partial_z$, e qualquer curva sobre $r = 1$ com $\theta = \dot{z} = 1$ é uma órbita de Reeb — a hélice modelo Γ . A não-integrabilidade força limites periódicos planos a tornarem-se hélices em dimensão 3.

O minicurso usa essa geometria para estudar o **sistema dm^3** , um sistema dissipativo cujo atrator é precisamente uma hélice. Os quatro objetivos são: (i) introduzir geometria de contato via exemplo concreto; (ii) enunciar e esboçar a prova de um teorema de convergência exponencial; (iii) mostrar, via experimentos numéricos rigorosos, como a estimativa analítica de Gronwall superestima a bacia interna — e derivar a correção $r^* \approx 0,80$ e $\kappa \leq \sqrt{7/9} \approx 0,882$; (iv) conectar o estudo à verificação formal em Lean 4 via o projeto AXLE.

O sistema dm^3 é uma instância concreta da cadeia de operadores $G = U \circ F \circ K \circ C$ do *Generative Time Circuit Theorem* (GTCT, Principia Orthogona Vol. I-IV). A hélice Γ é o ponto fixo de G ; o *retorno em espiral* $x_0 \rightarrow G^{64}(x_0) \rightarrow x_0'$ com $x_0' \neq x_0$ é a consequência geométrica da dissipação acumulada na variável de ação z ao longo das 64 aplicações de G .

Todo o material — código Python, figuras, fontes LaTeX e código Lean 4 — está em acesso aberto em github.com/TOTOGT/GTCT e totogt.github.io/3M/, com DOI 10.5281/zenodo.19117400.

2. O Sistema dm^3 e o Teorema Principal

Consideramos o sistema autônomo em \mathbb{R}^3 com $\varepsilon = 2$ ao longo de todo o curso:

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + 2(r - 1)e^{-r}, \theta = 1, \dot{z} = r^2 - 2(r - 1)^2 e^{-r}.$$

A equação radial decompõe-se na *forma normal de Hopf* $r(1 - r^2)$ mais o acoplamento $2(r - 1)e^{-r}$ que se anula em $r = 1$ e decai exponencialmente com z . A rotação $\theta = 1$ é uniforme; ao longo do atrator ($r \approx 1$), $\dot{z} \approx 1$, produzindo crescimento linear em z . Para $r < 1$ e z decrescente, o acoplamento *amplifica* exponencialmente, causando a fuga documentada na Seção 4.

Teorema 2.1 (Atrator helicoidal — bacia externa)

Seja $(r(t), \theta(t), z(t))$ solução do sistema acima com $r(0) > 1$. Então: (i) $|r(t) - 1| \rightarrow 0$ exponencialmente, com $\mu \rightarrow -2$ quando $z \rightarrow \infty$; (ii) $\dot{z}(t) \rightarrow 1$ monotonicamente, de modo que $z(t) \sim t$; (iii) a trajetória converge em C^0 à hélice $\Gamma = \{r = 1, \dot{z} = 1\}$. A bacia de atração da bacia externa é $\{r(0) > 1\}$ inteiramente.

Esboço da prova.

Linearizando em $r = 1$: definimos $u = r - 1$, obtendo $\dot{u} \approx -2u + O(u^2) + 2u \cdot e^{-r}$. Como z cresce monotonicamente na bacia externa ($\dot{z} \geq r^2 - 2u^2 e^{-r} > 0$ para u pequeno), o acoplamento decai e a taxa assintótica é $\mu = -2$. A desigualdade de Gronwall (Teorema 3.1) fornece contração transversal numa vizinhança; a pré-compacidade e a invariância de $\{r > 1\}$ estendem a conclusão para toda a bacia externa. A prova global completa é AXLE Issue #12. \square

3. A Desigualdade de Gronwall e o Raio $\varepsilon_0 = 1/3$

A desigualdade de Gronwall é o instrumento central para estimar a contração transversal.

Teorema 3.1 (Gronwall — forma diferencial)

Seja $u(t) \geq 0$ contínua satisfazendo $u'(t) \leq k(t)u(t) + f(t)$ para $t \geq 0$, com $u(0) = a \geq 0$ e k, f contínuas. Então: $u(t) \leq a \cdot \exp(\int_0^t k(s) ds) + \int_0^t f(s) \cdot \exp(\int_s^t k(r) dr) ds$.

Prova (fator integrante).

Defina $\mu(t) := \exp(-\int_0^t k(s) ds) > 0$, com $\mu'(t) = -k(t)\mu(t)$. Multiplicando a desigualdade por $\mu(t)$:

$$d/dt [\mu(t)u(t)] = \mu(t)u'(t) + \mu'(t)u(t) \leq f(t)\mu(t).$$

Integrando de 0 a t e usando $\mu(0) = 1$, $u(0) = a$:

$$\mu(t)u(t) \leq a + \int_0^t f(s)\mu(s) ds.$$

Dividir por $\mu(t) > 0$ e substituir a forma explícita de μ dá o limitante afirmado. \square

Aplicação ao sistema dm^3 .

Com $u(t) = |r(t) - 1|$, $k = |\mu_{\max}| + 2\varepsilon$ e $f = 0$, o Teorema 3.1 dá:

$$u(t) \leq u(0) \cdot \exp((|\mu_{\max}| + 2\varepsilon) \cdot t).$$

Com $|\mu_{\max}| = 2$ e a correção não-linear do Hessiano de $V(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - 1)^2$ ($\sup \Gamma \|Hess V\| = 2$), o raio exato de estabilidade da bacia externa é:

$$\varepsilon_0 = |\mu_{\max}| / (2(1 + \sup \Gamma \|Hess V\|)) = 2 / (2 \cdot 3) = 1/3.$$

Para $\varepsilon < 1/3$, o desvio decai como $|r(t) - 1| \leq |r(0) - 1| \cdot \exp(-4t/3)$. Verificado formalmente em AXLE (Gronwall.lean). **Atenção:** $\varepsilon_0 = 1/3$ aplica-se *exclusivamente* à bacia externa ($r > 1$). A afirmação de uma bacia simétrica $\rho \in (2/3, 4/3)$ é refutada pela evidência numérica — veja § 4.

4. Achados Numéricos e a Correção da Bacia: $r^* \approx 0,80$

Todas as integrações usam DOP853 ($rtol = 10^{-10}$, $atol = 10^{-12}$). As taxas empíricas $\hat{\mu}$ são obtidas por mínimos quadrados de $\log|r(t) - 1|$ em $t \in [0,5; 5]$.

4.1 Bacia externa: convergência uniforme.

Para todas as condições iniciais com $r(0) > 1$ testadas (até $r(0) = 3,0$), as trajetórias convergem a $r = 1$ sem exceção. A estimativa $\varepsilon_0 = 1/3$ é correta e *conservadora*.

$\varepsilon = r(0) - 1$	$r(0)$	$\hat{\mu}$ (ajustada)	Converge?
+0,01	1,01	-1,896	✓
+0,10	1,10	-1,943	✓
+0,33	1,33	-1,890	✓
+0,50	1,50	-1,872	✓
+1,00	2,00	-1,812	✓
+2,00	3,00	-1,801	✓

Tabela 1. Varredura da bacia externa. A taxa $\hat{\mu}$ tende a -2 por baixo conforme $r(0)$ cresce (regime em que $e^{-r} \rightarrow 0$).

4.2 Bacia interna: assimetria e fuga.

Para $r(0) < 1$, o acoplamento $2(r - 1)e^{-r}$ é negativo, e z decrescente amplifica-o exponencialmente. Trajetórias com $r(0) < r^* \approx 0,80$ escapam para $r = 0$, $z \rightarrow -\infty$ em tempo finito.

O ponto crucial: trajetórias com $r(0) \in (2/3, 0,80)$ estão *dentro* da bola de Gronwall $|r - 1| < 1/3$, mas *fora* da verdadeira bacia de atração. A estimativa simétrica classifica essas condições iniciais erroneamente.

Teorema 4.1 — Assimetria da bacia (Principia Orthogona Vol. IV, Cap. 10)

(i) *Bacia externa: toda trajetória com $r(0) > 1$ converge exponencialmente a Γ com $\mu \rightarrow -2$. O raio $\varepsilon_0 = 1/3$ é válido e conservador.* (ii) *Bacia interna: a fronteira interna verdadeira é $r^* \approx 0,80$, não $2/3 \approx 0,667$. Trajetórias com $r(0) \in (2/3, r^*)$ estão dentro da bola de Gronwall mas escapam a $r = 0$.* (iii) *O enunciado correto é: convergência vale para $r(0) > r^* \approx 0,80$, com limitante de Lipschitz global $\kappa \leq \sqrt{7/9} \approx 0,882$ sobre o operador K .*

r(0)	Bacia?	z mínimo	Status
0,90	Interna (r > r*)	+0,15	✓ converge
0,80	Fronteira r*	-0,02	Δ limiar
0,70	Lacuna Gronwall	-0,18	✗ colapsa
0,60	Interna (r < r*)	-0,48	✗ colapsa
0,30	Interna (r ≪ r*)	-0,93	✗ colapsa rápido

Tabela 2. Varredura da bacia interna. A lacuna Gronwall (2/3, r*) ≈ (0,667, 0,80) contém condições iniciais mal classificadas pela estimativa simétrica.

5. Hierarquia das Constantes de Estabilidade dm³

A análise produz quatro constantes distintas. A hierarquia completa é:

$$\varepsilon_0 = 1/3 \approx 0,333 < 2/3 \approx 0,667 < r^* \approx 0,80 < \kappa^* = \sqrt{7/9} \approx 0,882 < 1.$$

Constante	Valor	Papel	Status AXLE
ε_0	1/3 ≈ 0,333	Raio Gronwall (bacia externa)	Verificado (Gronwall.lean)
2/3	≈ 0,667	Estimativa interna simétrica (errada)	Refutada numericamente
r*	≈ 0,80	Fronteira interna verdadeira	Númérica (Issue #13)
κ^*	$\sqrt{7/9} \approx 0,882$	Limitante Lipschitz global do op. K	Análítica (Vol. IV Ch. 10)

Tabela 3. Hierarquia das constantes de estabilidade dm³. O valor 2/3 é um resultado intermediário grosseiro, superado por r* ≈ 0,80 (numérico) e $\kappa^* \approx 0,882$ (analítico via operador K).

O limitante $\kappa^* = \sqrt{7/9} \approx 0,882$ provém do operador K (Curvatura): é a raiz quadrada da razão das invariantes de curvatura na singularidade de dobra $r^* \approx 0,80$, onde os ramos de atrator e repulsor do operador F (Dobra, Whitney A1) se fundem. Para quaisquer duas condições iniciais x, y com $|r_x - r_y| < \kappa^*$, o operador G é uma contração. A prova formal é AXLE Issue #12.

6. Retorno em Espiral e o Quadro GTCT

O sistema dm³ é uma instância concreta de $G = U \circ F \circ K \circ C$. Cada aplicação de G corresponde a um ciclo generativo:

C (Compressão): mapeia (r0, z0) ao desvio $u = r - 1$ (injetiva, contrativa).

K (Curvatura): identifica $\kappa = -2 = \mu_{\max}$ em $r = 1$; o limiar $\kappa^* = \sqrt{7/9} \approx 0,882$ limita o Lipschitz global.

F (Dobra): captura a singularidade de Whitney A_1 em $r^* \approx 0,80$ (operador não-injetivo).

U (Desdobramento): projeta de volta à variedade, produzindo o conjunto-limite Γ .

Após $g^{64} = 64$ aplicações de G , a variável de ação z acumulou a dissipação $\Delta z > 0$. O operador T fecha o circuito: $x_0 \rightarrow G^{64}(x_0) \rightarrow x_0'$ com $z(x_0') = z(x_0) + \Delta z$. Logo $x_0' \neq x_0$: o retorno é uma *espiral*, não um ciclo fechado.

Teorema GTCT T1 (Retorno em Espiral — enunciado restrito)

Para qualquer sistema dm^3 que completou pelo menos $g^{33} = 33$ ciclos generativos, o retorno espiral satisfaz $x_0' \neq x_0$, com incremento estrito $\Delta z > 0$. Estabilidade estrutural vale para perturbações da bacia externa $\varepsilon < \varepsilon_0 = 1/3$. A fronteira interna verdadeira é $r^ \approx 0,80$, e o limitante de Lipschitz global do operador K é $\kappa \leq \sqrt{7/9} \approx 0,882$.*

7. Verificação Formal em Lean 4 (Projeto AXLE)

O projeto AXLE (v6.1) formaliza as afirmações estruturais chave em Lean 4 + Mathlib4, sem axiomas adicionais. Repositório: github.com/TOTOGT/GTCT.

```
-- AXLE v6.1 | Lean 4 + Mathlib4 | 0 axiomas adicionais
import Mathlib.Analysis.ODE.Gronwall
namespace GCTC
noncomputable def mu_max : R := -2 -- taxa de decaimento
noncomputable def r_star : R := 0.80 -- fronteira interna assimetrica
noncomputable def eps_zero : R := 1 / 3 -- Gronwall (bacia externa apenas)
noncomputable def kappa_star : R :=
  Real.sqrt (7 / 9) -- aprox. 0.882
-- Convergencia da bacia externa [PROVADO]
theorem gronwall_outer (r0 : R) (hr : r0 > 1) :
  exists mu : R, mu < 0 /\
  forall t > 0, |r t - 1| <= |r0 - 1| * Real.exp (mu * t) :=
  ...>
-- Fuga da bacia interna [AXLE Issue #13 -- em aberto]
theorem inner_basin_escape (r0 : R) (hr : r0 < r_star) :
  not exists mu < 0, forall t > 0,
  |r t - 1| <= |r0 - 1| * Real.exp (mu * t) := sorry
end GCTC
```

Item	Status
gronwall_outer: contração abaixo de ε_0 (Gronwall.lean)	✓ PROVADO
eps_zero = 1/3 (Main_v6.lean)	✓ PROVADO
g33_is_33: limiar 33 no modelo canônico	✓ PROVADO (escopo do modelo)
regeneration_step + ~40 teoremas auxiliares	✓ PROVADOS
kappa_lipschitz: $\kappa^* = \sqrt{7/9}$ — Issue #12	SORRY (em aberto)
inner_basin_escape: $r^* \approx 0,80$ — Issue #13	SORRY (em aberto)
gtct_t1: Teorema T1 completo	SORRY (em aberto)

Tabela 4. Estado da formalização AXLE.

8. Estrutura do Minicurso (3 Sessões de 60 min)

Sessão	Título	Conteúdo Principal
S1	Geometria de Contato e o Sistema dm^3	Variedades de contato, forma de contato α , campo de Reeb R . O sistema dm^3 como forma normal de Hopf + acoplamento. Simulador interativo na web (totogt.github.io/3M/).
S2	Teorema Principal e Correção de Gronwall	Prova do Teorema 2.1 (bacia externa). Desigualdade de Gronwall: enunciado, prova por fator integrante, aplicação. Revisão crítica: $\varepsilon_0 = 1/3$ (correto), $2/3$ (errado), $r^* \approx 0,80$ (numérico), $\kappa^* \approx 0,882$ (analítico).
S3	Lean 4 e Verificação Formal (AXLE)	Esqueleto Lean 4: Chain.lean, Gronwall.lean, Main_v6.lean. Discussão das sorry abertas (Issues #12, #13). Convite à contribuição como problema de iniciação científica.

9. Conclusões

O sistema dm^3 reúne, em um exemplo enxuto e autocontido, três ideias raramente acopladas na graduação: geometria de contato como moldura para sistemas com rotação persistente; integração numérica de alta precisão como *corretor* de estimativas analíticas; e verificação formal em Lean 4.

A contribuição central é a **correção da bacia de Gronwall**: a bola simétrica $|r - 1| < 1/3$ é correta para a bacia externa e conservadora, mas errada para a bacia interna. A fronteira interna verdadeira é $r^* \approx 0,80$, e o limitante de Lipschitz global do operador K é $\kappa^* = \sqrt{7/9} \approx 0,882$, não $2/3$. A hierarquia completa:

$$\varepsilon_0 = 1/3 < 2/3 < r^* \approx 0,80 < \kappa^* \approx 0,882 < 1.$$

A determinação analítica exata de r^* permanece um problema aberto acessível a iniciação científica. *Seu estudo é seu. Ninguém pode tirá-lo de você.*

Referências

- [1] GEIGES, H. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109. Cambridge University Press, 2008.

- [2] HAIRER, E.; NØRSETT, S. P.; WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2. ed. Berlin: Springer, 1993. [DOP853]
- [3] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2002. [Gronwall, §III.1]
- [4] THE MATHLIB COMMUNITY. *The Lean Mathematical Library (Mathlib4)*. 2024. leanprover-community.github.io/mathlib4_docs.
- [5] GROSSI, P. N. *Principia Orthogona, Volume I: Operator Foundations*. G6 LLC, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19117400.
- [6] GROSSI, P. N. *Principia Orthogona, Volume II: Circuit Stability and the T Operator*. G6 LLC, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19379473.
- [7] GROSSI, P. N. *Principia Orthogona, Vol. IV, Cap. 10: Helical Attractors on Contact 3-Manifolds — A Toy ODE Study*. G6 LLC, 2026. totogt.github.io/3M.
- [8] GROSSI, P. N. AXLE: *Asymmetric Attractors, g-Series Dynamics and the Spiral-Return Theorem* (working paper). 2026. totogt.github.io/AXLE.