

Helical Attractors on Contact 3-Manifolds

A Toy ODE Study on $(\mathbb{R}^3, \alpha = dz - r^2 d\theta)$

Pablo Nogueira Grossi

G6 LLC • Newark, NJ

pg6llc@gmail.com • ORCID: 0009-0000-6496-2186

Submissão (Pôster · Long Abstract) à XII Bienal da SBM — UFRN, Natal-RN — 2026

Modalidade e Categoria

Modalidade: Pôster — Long Abstract (3 páginas). **Código da submissão:** P290. **Sessão:** quinta-feira, 6 de agosto de 2026, 16:00–17:00, Saguão dos Anfiteatros do CCET. **Área:** Geometria e Topologia (variedades de contato, sistemas dinâmicos, formalização). Portal Bienal (Atratores Helicoidais): <https://grossi-ops.github.io/Atratores/>. Livro vivo (B3 · Vol. III, *Inglês para Pesquisadores Matemáticos* — ESL for Researchers; eBook): <https://totogt.github.io/geometry>.

English Abstract

We introduce a one-parameter toy ODE on the contact 3-manifold $(\mathbb{R}^3, \alpha)$ with contact form $\alpha = dz - r^2 d\theta$ and Reeb field $R = \partial_z$. Writing a state as $(r, \theta, z) \in (0, \infty) \times S^1 \times \mathbb{R}$, the system — which we call dm^3 — is

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \varepsilon(r - 1)e^{-z}, \quad \dot{\theta} = 1, \quad \dot{z} = r^2 - \varepsilon(r - 1)^2 e^{-z}, \quad (1)$$

with fixed coupling $\varepsilon = 2$. The cylinder $\Gamma = \{r = 1\}$ is invariant and carries the helical flow $\dot{\theta} = 1$, $\dot{z} = 1$, a lift of the Reeb orbit; the question is whether Γ attracts.

Main result (Theorem 2.1). Let $u(t) = r(t) - 1$. For any initial data with $|u(0)| < 1/3$ and $z(0) \geq \log 2$, the solution exists for all $t \geq 0$ and converges exponentially to Γ at the rate $\mu = -2$ given by the Jacobian eigenvalue of the radial part at $r = 1$; explicitly $|u(t)| \leq C|u(0)|e^{-2t}$ for a constant C depending only on $\varepsilon e^{-z(0)}$. The proof is a Gronwall argument: squaring the radial equation yields $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2 \leq -2u^2 - 3u^3 - u^4 + \varepsilon u^2 e^{-z}$, and the bound on $z(0)$ forces the last term to be dominated on the relevant window.

A scaling law. The pair $(\varepsilon, z(0))$ enters the dynamics only through the single combination

$$\lambda = \varepsilon e^{-z(0)}, \quad (2)$$

since ε and e^{-z} never occur apart in (1). Every basin quantity is therefore a function of λ alone. This is what reconciles the theorem's hypothesis with the numerics below: $z(0) \geq \log 2$ at $\varepsilon = 2$ means $\lambda \leq 1$, whereas the certified section $z(0) = 0$ means $\lambda = 2$.

Numerical findings (Table 1). A DOP853 integrator at $\text{rtol} = 10^{-13}$, $\text{atol} = 10^{-20}$, on the section $\theta(0) = 0$, $z(0) = 0$ (that is, $\lambda = 2$), confirms the rate and reveals asymmetry: the outer basin $r(0) > 1$ converges for every tested initial condition up to $r(0) = 3.0$, while the inner basin $r(0) < 1$ converges only for

$$r(0) > r_\star = 0.77594059 \quad (\lambda = 2), \quad (3)$$

certified by bisection to 10^{-7} and reproducible on any IEEE-754 platform. Since $r_\star > 2/3$, the interval $(2/3, r_\star)$ consists of initial data lying inside the Gronwall ball $|u(0)| < 1/3$ that nevertheless escape. This does not contradict Theorem 2.1, whose second hypothesis $z(0) \geq \log 2$ is exactly what excludes them: at $\lambda = 1$ one finds $r_\star = 0.57224 < 2/3$, so there the Gronwall ball sits strictly inside the basin. *The hypothesis $z(0) \geq \log 2$ is therefore necessary, not cosmetic* — and quantifying that necessity is the content of Conjecture 2.2.

Contact-geometric reading. The asymmetry $r_* \neq 2 - r_*$ is diagnostic: it is the fingerprint of the coupling term $\varepsilon(r-1)^2 e^{-z}$ in $\dot{z}$, which is not symmetric under $u \mapsto -u$ because it couples to the non-integrable direction of α . A symmetric basin would indicate that the attractor is reducible to a 2D problem transverse to R ; the observed asymmetry indicates that the full 3-manifold contact structure is essential to the convergence.

Reproducibility. All numerics reproduce via a public Python/DOP853 lab (`certify_rstar.py`); a Lean 4 skeleton (AXLE Issue #12) isolates the one nontrivial obligation (a Lipschitz bound on the coupling operator). Eight chapters of the book develop the framework and formalisation path; the present abstract reports Chapter 2.

Outer basin $r(0) > 1$		Inner basin $r(0) < 1$		
$r(0) - 1$	$\hat{\mu}$	$r(0)$	$\dot{z}(0,3)$	outcome
+0,10	-1,882	0,90	+0,79	conv.
+0,33	-1,922	0,80	+0,51	conv.
+0,50	-1,937	0,77594	+0,42	limiar r_*
+1,00	-1,957	0,77	+0,40	collapses
+1,50	-1,965	0,70	+0,10	collapses
		0,50	-1,67	collapses

Table 1: Section $\theta(0) = 0$, $z(0) = 0$ ($\lambda = 2$). Empirical contraction rate $\hat{\mu}$ is the slope of $\log |r(t) - 1|$ on the transient window $t \in [0,5, 6]$; on the asymptotic window $t \in [5, 15]$ every entry equals $-2,00$ to three decimals, confirming $\hat{\mu} \rightarrow \mu = -2$. Column $\dot{z}(0,3)$ is the early vertical velocity, an inner-basin diagnostic. The inner edge is $r_* = 0,77594059 > 2/3$.

Resumo (em Português)

Apresentamos uma ODE-brinquedo de um parâmetro na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \alpha)$, com forma de contato $\alpha = dz - r^2 d\theta$ e campo de Reeb $R = \partial_z$. O sistema dm^3 está dado pela equação (1), com $\varepsilon = 2$. O cilindro $\Gamma = \{r = 1\}$ é invariante e carrega o fluxo helicoidal $(\dot{\theta}, \dot{z}) = (1, 1)$, um levantamento da órbita de Reeb.

O Teorema 2.1 afirma que, para condições iniciais $|r(0) - 1| < 1/3$ e $z(0) \geq \log 2$, as trajetórias convergem exponencialmente a Γ à taxa $\mu = -2$, dada pelo autovalor jacobiano radial em $r = 1$. A demonstração combina Gronwall com um controle explícito do termo de acoplamento $\varepsilon(r-1)e^{-z}$.

Lei de escala. O par $(\varepsilon, z(0))$ entra na dinâmica apenas por meio da combinação $\lambda = \varepsilon e^{-z(0)}$, pois ε e e^{-z} nunca aparecem separados em (1). Toda quantidade de bacia é, portanto, função somente de λ .

A integração numérica (DOP853, $\text{rtol} = 10^{-13}$), na seção $\theta(0) = 0$, $z(0) = 0$ (isto é, $\lambda = 2$), reproduz a taxa e revela uma assimetria de bacia: a bacia externa ($r(0) > 1$) converge em todos os testes até $r(0) = 3,0$, enquanto a interna ($r(0) < 1$) colapsa abaixo de

$$r_* = 0,77594059 \quad (\lambda = 2),$$

certificado por bisseção até 10^{-7} . Como $r_* > 2/3$, o intervalo $(2/3, r_*)$ contém dados iniciais dentro da bola de Gronwall $|u(0)| < 1/3$ que ainda assim escapam. Isso *não* contradiz o Teorema 2.1: sua segunda hipótese $z(0) \geq \log 2$ é precisamente o que os exclui, pois com $\lambda = 1$ tem-se $r_* = 0,57224 < 2/3$. A hipótese sobre $z(0)$ é, portanto, necessária, e não cosmética.

Essa assimetria é diagnóstica da estrutura de contato: indica que a convergência depende da direção não-integrável de α , e não se reduz a uma análise 2D transversal ao campo de Reeb.

Contribuição do pôster.

- Formalização explícita do sistema dm^3 como levantamento natural da órbita de Reeb;
- prova auto-contida do Teorema 2.1 com constante ε_0 ótima dentro da técnica;

- (iii) a lei de escala $\lambda = \varepsilon e^{-z(0)}$, que unifica a família de bacias em um único parâmetro, e a tabela numérica reprodutível daí decorrente;
- (iv) identificação do gap $r_* > \varepsilon_0$ como conjectura aberta (Conjectura 2.2 do capítulo);
- (v) um esqueleto Lean 4 (AXLE, Issue #12) que isola a única obrigação não-trivial da formalização.

Materiais Digitais — Living Book

O pôster é a porta de entrada de um livro vivo completo, que desenvolve o programa em oito capítulos:

1. **Portal Bial (Atratores Helicoidais):** <https://grossi-ops.github.io/Atratores/> — página oficial da edição XII Bial: pôster, abstracts, links de simulação e cursos curtos.
2. **Publisher hub editorial:** <https://totogt.github.io/geometry> — capa, ladrilhos de capítulos, simulador 3D embutido, ISBN.
3. **Capítulo E (GTCT para Todos):** <https://totogt.github.io/3M/chE-gtct.html> — nove axiomas, quatro teoremas, doze operadores.
4. **Minicurso (3 sessões de 60 min):** <https://totogt.github.io/3M/sessions/> — S1 geometria de contato, S2 Teorema 2.1 e bacia assimétrica, S3 esqueleto Lean 4.
5. **Simulador 3D (Three.js):** <https://totogt.github.io/3M/sims/helical-attractor.html>.
6. **Laboratório numérico (Python/DOP853):** https://github.com/TOTOGT/3M/blob/main/labs/dm3_numeric.py — reproduz a Tabela 1.
7. **Formalização (Lean 4 / Mathlib 4):** <https://github.com/TOTOGT/AXLE> — Issue #12 (kappa_lipschitz).
8. **Exposição local (Cajueiro Principle, Natal-RN):** <https://grossi-ops.github.io/cajueiro/> — exposição digital companheira da Comunicação Oral CO144; ancora a discussão didática local do programa pedagógico do livro.

Bibliografia (mínima)

- [1] GROSSI, P. N. *Helical Attractors on Contact 3-Manifolds*. Principia Orthogona, Vol. IV (GTCT T1), Cap. 10. G6 LLC, Newark NJ, 2026. <https://totogt.github.io/GTCT/>.
- [2] GROSSI, P. N. *The Mini-Beast: Inglês para Pesquisadores Matemáticos via TOGT*. Principia Orthogona, B3 · Vol. III. G6 LLC, Newark NJ, 2026 (livro vivo, somente eBook). ISBN 979-8-9954416-6-3. <https://totogt.github.io/geometry>.
- [3] GEIGES, H. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge: CUP, 2008.
- [4] HAIRER, E.; NØRSETT, S. P.; WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I*. 2. ed. Springer, 1993 (DOP853).
- [5] MATHLIB 4 COMMUNITY. *Mathlib*. <https://leanprover-community.github.io/mathlib4-docs>.

Submissão à XII Bial da Sociedade Brasileira de Matemática. UFRN, Natal-RN, 3–7 de agosto de 2026. Categoria: Pôster (Long Abstract, 3 pp.) — **P290**, quinta 06/08, 16:00–17:00, Saguão dos Anfiteatros do CCET. Submissões companheiras do mesmo autor: **EXP13** (Exposição: *Cimática com Máquinas* — Figuras de Chladni, ressonância e a matemática do som estacionário; Saguão do CETECH, todos os dias do evento); **MC48** (Minicurso: *Atratores Helicoidais em Variedades de Contato* — terça 04/08, 16:30–18:30, EILAB); **CO144** (Comunicação Oral: *O Princípio do Cajueiro* — quarta 05/08, 17:30–18:30, F6); **OF53** (Oficina: *A Escada de Recorrência: do k -nacci ao limiar $\tau = 2$* — sexta 07/08, 14:00–16:00, H3).