

Oficina: A Escada de Recorrência

Do k -nacci ao limiar $\tau = 2$

Pablo Nogueira Grossi

G6 LLC

brodananda@gmail.com

Submissão à XII Bienal da SBM — UFRN, Natal-RN — 2026

Modalidade e Duração

Modalidade: Oficina (atividade prática-coletiva). **Duração:** 2 horas, em um único encontro. **Público-alvo:** estudantes de graduação em Matemática (a partir do segundo período) e professores da educação básica interessados em conexões entre recorrências lineares, álgebra e dinâmica discreta. **Pré-requisitos:** cálculo diferencial de uma variável e noções de álgebra linear (autovalores de matrizes 2×2).

Resumo

Esta oficina propõe uma exploração hands-on de uma família de recorrências lineares que chamamos de k -nacci: a generalização da sequência de Fibonacci em que cada termo é soma dos k anteriores. Começando com $k = 2$ (Fibonacci clássico, cuja razão áurea $\varphi \approx 1,618$ é a raiz dominante do polinômio característico $x^2 = x + 1$), os participantes, divididos em grupos, computam manualmente as raízes dominantes dos polinômios característicos para $k = 3, 4, 5, 6$ (Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, Hexanacci), e juntos constroem no quadro a *Escada de Recorrência* $\pi \rightarrow \varphi \rightarrow \mu \rightarrow \eta \rightarrow \Delta \rightarrow \Sigma \rightarrow \Omega$, observando que a razão dominante τ_k converge monotonicamente para o valor limite $\tau = 2$ quando $k \rightarrow \infty$.

O objetivo central é triplo: (i) tornar tangível o conceito de polinômio característico de uma recorrência linear; (ii) oferecer uma experiência coletiva de descoberta matemática, em que cada grupo contribui com um degrau da escada e o padrão emerge apenas pela combinação das contribuições; e (iii) conectar um tema clássico de combinatória enumerativa (sequências de Fibonacci generalizadas) a uma ideia geométrica contemporânea — a de que $\tau = 2$ funciona como um *limiar* na dinâmica de sistemas recorrentes, além do qual o comportamento qualitativo muda.

A oficina tem caráter experimental-didático: grupos pequenos (3 a 4 pessoas) recebem cada um um valor de k e uma folha de trabalho; apresentam a raiz dominante obtida; a escada é construída coletivamente. O fechamento retoma o significado pedagógico de $\tau = 2$ como fronteira entre regimes dinâmicos “subcríticos” e “supercríticos”, abrindo caminho para discussões em sistemas dinâmicos, modelagem biológica e dinâmica de populações.

Objetivos de Aprendizagem

Ao final da oficina, espera-se que os participantes sejam capazes de:

1. Formular o polinômio característico de uma recorrência linear de ordem k da forma $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k}$;
2. Localizar numericamente (por bissecção ou método de Newton) a raiz dominante τ_k no intervalo $(1, 2)$;
3. Reconhecer o padrão $\tau_k \nearrow 2$ e justificá-lo analiticamente por meio da observação de que $p_k(2) = 1$ para todo k ;
4. Discutir em grupo o significado qualitativo de $\tau = 2$ como limiar dinâmico, e relacionar a escada de recorrência a tópicos afins (seqüências de Padovan, Lucas, problemas de pavimentação).

A Escada de Recorrência — Conteúdo Matemático

Para cada inteiro $k \geq 2$, define-se a *seqüência k -nacci* $(a_n^{(k)})$ pela recorrência

$$a_n^{(k)} = a_{n-1}^{(k)} + a_{n-2}^{(k)} + \dots + a_{n-k}^{(k)}, \quad \text{com condições iniciais apropriadas.}$$

Sua equação característica é

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1, \quad \text{ou equivalentemente} \quad p_k(x) := x^{k+1} - 2x^k + 1 = 0.$$

A raiz dominante $\tau_k \in (1, 2)$ — única neste intervalo — governa o crescimento assintótico da seqüência: $a_n^{(k)} \sim C \cdot \tau_k^n$.

A Tabela 1 apresenta os sete primeiros degraus da escada, com nomenclatura grega adotada para expor a estrutura de saltos da escada (cada nome rotula uma posição específica no espectro).

Símbolo	Nome	k	Raiz dominante τ_k
π	(basal, período)	—	1,000 000 $\dots$ (ponto fixo)
φ	Fibonacci	2	1,618 033 988 $\dots$
μ	Tribonacci	3	1,839 286 755 $\dots$
η	Tetranacci	4	1,927 561 975 $\dots$
Δ	Pentanacci	5	1,965 948 236 $\dots$
Σ	Hexanacci	6	1,983 582 843 $\dots$
Ω	Heptanacci	7	1,991 964 197 $\dots$
τ	(limite)	∞	2,000 000 000 $\dots$

Tabela 1: A Escada de Recorrência — sete degraus mais o limite.

O fato-chave — a ser descoberto coletivamente na oficina — é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 2, \quad \text{com a estimativa assintótica} \quad 2 - \tau_k \sim \frac{1}{2^k}.$$

A prova elementar combina duas observações: (i) $p_k(2) = 2^{k+1} - 2^{k+1} + 1 = 1 > 0$, indicando que 2 nunca é raiz; (ii) $p'_k(2) \rightarrow \infty$, de modo que a raiz “aproxima-se de 2” na taxa geométrica acima.

Metodologia Prática-Coletiva

A oficina organiza-se em cinco blocos, totalizando 120 minutos.

Materiais: quadro-branco com espaço para a escada completa; calculadora ou celular; folhas A4 impressas com o roteiro (uma por grupo). Sem exigência de laboratório.

Tempo	Atividade
0–15 min	Introdução. Revisão rápida da recorrência de Fibonacci, demonstração da solução geral via polinômio característico, motivação da pergunta: <i>o que acontece se somarmos mais termos?</i>
15–45 min	Trabalho em grupos. Cada grupo recebe um $k \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e folha de trabalho: (a) escrever a recorrência; (b) formar o polinômio característico; (c) localizar τ_k por bissecção ou Newton (calculadora permitida).
45–75 min	Apresentações. Cada grupo escreve no quadro o seu degrau τ_k . O facilitador constrói a escada completa em tempo real, rotulando cada degrau com o símbolo grego correspondente.
75–100 min	Síntese matemática. Discussão coletiva: <i>por que nenhum τ_k atinge 2?</i> Prova da identidade $p_k(2) = 1$. Observação empírica de que $2 - \tau_k$ decresce exponencialmente; justificativa heurística.
100–120 min	Extensões e conexões. Sequência de Padovan; pavimentações de dominós; crescimento populacional em modelos de Leslie; menção à ocorrência de $\tau = 2$ como limiar em sistemas dinâmicos contínuos (ODE dissipativas, gastos energéticos em organismos). Encerramento: lista de leitura sugerida.

Tabela 2: Cronograma de 120 minutos, encontro único.

Relevância para os Eixos Temáticos da Bienal

A oficina articula-se naturalmente com o eixo de *Matemática e suas Aplicações*, por situar uma família clássica de recorrências em contato com ideias contemporâneas de dinâmica. Ao mesmo tempo, por seu formato acessível e coletivo, dialoga com o eixo de *Formação de Professores* e com a *Matemática na Educação Básica*, oferecendo a professores uma atividade replicável em sala de aula de ensino médio (com adaptações no grau de formalização da convergência).

Bibliografia

1. HOGGATT, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin, 1969.
2. GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics*. 2. ed. Addison-Wesley, 1994.
3. KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience, 2001.
4. SLOANE, N. J. A. *OEIS* — sequências A000045, A000073, A000078, A001591, A001592. <https://oeis.org>.
5. GROSSI, P. N. *Helical Attractors on Contact 3-Manifolds* (Principia Orthogona, Vol. IV). Zenodo, 2026. <https://doi.org/10.5281/zenodo.19117400>.

Submissão à XII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. UFRN, Natal-RN, 3–7 de agosto de 2026. Categoria: Oficina (2h, encontro único). Código de tema: T2 (a confirmar no portal conforme eixo temático selecionado).