

## Cimática com Máquinas

*Figuras de Chladni, ressonância e a matemática do som estacionário — uma exposição interativa*

**Proponente:** Pablo Nogueira Grossi

**Afiliação:** Pesquisador independente — G6 LLC, Newark, NJ (EUA)

**ORCID:** [0009-0000-6496-2186](https://orcid.org/0009-0000-6496-2186)

**Contato:** [pablo@g6-llc.org](mailto:pablo@g6-llc.org)

**Modalidade:** Exposição (resumo 2–3 páginas) **Eixo:** T10 — Geometria e Topologia **Vínculos:** Volume IV “Atratores Helicoidais em 3-Variedades de Contato” • DOI [10.5281/zenodo.19117400](https://doi.org/10.5281/zenodo.19117400) **Companheiro digital:** [dm3 Soundworks](#) — simulador interativo em navegador (Placa de Chladni, batimentos binaurais, oito máquinas sonoras)

### Resumo

CIMÁTICA COM MÁQUINAS é uma exposição interativa que transforma um fenômeno clássico de EDP— as *figuras de Chladni* — em experiência de sala. Areia fina sobre uma placa metálica vibrante migra automaticamente para as *linhas nodais* da placa; o padrão que aparece é a visualização direta de uma autofunção do operador Laplaciano (ou, mais precisamente, do operador biharmônico de Kirchhoff–Love). A exposição combina uma placa de Chladni física com três simuladores digitais executados em navegador comum (sem instalação), todos abertos e reproduzíveis, e é conduzida por uma pergunta única: *o que a matemática escolhe, quando vibra?* Público-alvo: estudantes de graduação, professores de matemática e física, e público geral curioso sobre a conexão entre som, geometria e arquitetura. Pré-requisitos: nenhum. Produto entregue à SBM ao final da Bienal: um caderno em PT com quinze experimentos reproduzíveis em sala de aula, distribuído livremente.

*Abstract (EN).* CYMATICS WITH MACHINES is an interactive exhibition that turns a classical PDE phenomenon — *Chladni figures* — into a live experience. Sand on a vibrating metal plate migrates to the nodal lines of the plate, directly visualizing an eigenfunction of the Laplacian (more precisely, the Kirchhoff–Love biharmonic plate operator). The exhibition combines a physical Chladni plate with three browser-based simulators (no install, fully open), guided by one question: *what does mathematics select when it vibrates?* Target audience: undergraduate students, math and physics teachers, and the curious public. Free classroom booklet distributed at the Bienal.

### 1. Objetivos

1. Exibir ao vivo a *seleção de modos* pelo operador de ressonância: entender, sem precisar resolver nada no papel, que a areia não escolhe onde pousar — a matemática escolhe por ela.
2. Dar aos visitantes uma intuição geométrica dos autovalores e autofunções do Laplaciano em domínios planos arbitrários — incluindo domínios que o próprio visitante desenha.
3. Conectar o fenômeno das placas vibrantes a um teorema canônico da geometria espectral — *Pode-se ouvir a forma de um tambor?* (Kac 1966; Gordon–Webb–Wolpert 1992) — mostrando que a resposta é *não*, e o porquê.
4. Fornecer, como produto público da exposição, uma coleção aberta de *quinze experimentos reproduzíveis* em PT para ensino médio e graduação.

### 2. Fundamentação matemática

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado (a placa). As configurações estáveis de vibração são as autofunções do problema de autovalor

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \text{ em } \Omega, \quad \varphi_n|_{\partial\Omega} \text{ com condições de contorno apropriadas.} \quad (1)$$

Para placas finas e rígidas, o operador físico correto não é  $-\Delta$  mas o *biharmônico*  $\Delta^2$  (equação de Kirchhoff–Love), e as condições de contorno dependem de a placa ser *livre*, *apoiada*, ou *engastada*. Em

todos os casos, o conjunto  $\{\varphi_n\}$  forma uma base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ , e a *linha nodal*  $N_n = \{x \in \Omega : \varphi_n(x) = 0\}$  onde a placa não se move, não vibra.

O caso prototípico — placa quadrada  $[0, 1]^2$  com bordas apoiadas — dá autovalores  $\lambda_{m,n} = \pi^2(m^2 + n^2)$  e autofunções  $\varphi_{m,n}(x, y) = \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$ . A degenerescência  $\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m}$  quando  $m \neq n$  produz *superposições simétricas*  $\varphi_{m,n} + \varphi_{n,m}$ , e são essas superposições que Chladni de fato observou em 1787. A Figura 1 mostra linhas nodais para várias combinações.

Figuras de Chladni — linhas nodais de  $\varphi_{m,n} + \varphi_{n,m}$  na placa quadrada com bordas fixas

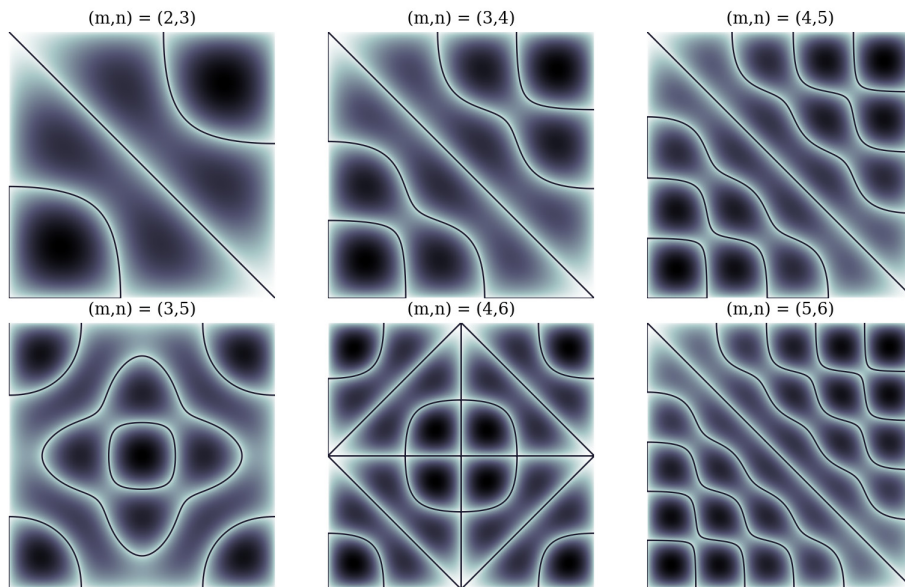


Figure 1: Seis autofunções simetizadas  $\varphi_{m,n} + \varphi_{n,m}$  na placa quadrada; em preto, a linha nodal  $N_{m,n}$  onde a areia repousa. A placa física reproduz essas figuras quando excitada pela frequência correspondente a  $\lambda_{m,n}$ .

**Do teorema de Chladni ao tambor de Kac.** A pergunta natural é *inversa*: conhecendo todo o espectro  $\{\lambda_n\}$ , é possível reconstruir  $\Omega$ ? Mark Kac formulou essa questão em 1966 (“Can One Hear the Shape of a Drum?”). A resposta surpreendente, dada por Gordon, Webb e Wolpert em 1992 via pares de domínios poligonais isoespectrais não-isométricos, é *não*: diferentes formas podem soar idênticas. A exposição torna essa resposta tátil — o visitante vê dois domínios distintos produzirem o mesmo conjunto de linhas nodais sob a mesma frequência.

### 3. A exposição — cinco máquinas

A exposição ocupa uma mesa de  $2 \times 1$  m com cinco estações. **M1. Placa de Chladni física:** placa quadrada de aço inox 0,5 mm sobre alto-falante subwoofer e gerador de sinal 100 Hz–2 kHz; o visitante varre a frequência e vê as figuras de Chladni aparecerem em areia fina. **M2. Gerador digital de Chladni** (módulo *Chladni* do [dm3 Soundworks](#)): no tablet, o visitante escolhe  $(m, n)$  e vê a linha nodal desenhada; conecta-se à M1 enviando a frequência correspondente. **M3. Batimentos binaurais** (módulo *Binaural*): duas senoides ligeiramente diferentes produzem um batimento perceptível; ilustra superposição linear e o que os sentidos medem. **M4. Caixa ressonante 1D:** tubo acrílico de 30 cm com grânulos de isopor; exhibe os modos longitudinais  $\varphi_n(z) = \sin(n\pi z/L)$ . **M5. “Desenhe seu tambor”:** tablet com solver de elementos finitos (Python/FEniCS em servidor web leve); o visitante desenha  $\Omega$  com o dedo, recebe os primeiros dez autovalores e linhas nodais, e vê lado a lado os pares isoespectrais de Gordon–Webb–Wolpert — *duas formas diferentes, os mesmos autovalores*.

**Contexto cultural e brasileiro.** Um painel breve dedica-se a espaços ressonantes da tradição brasileira (igrejas barrocas de Ouro Preto, Teatro da Paz em Belém, o berimbau como sistema corda-cabaça-moeda) e à arqueoaústica (Hypogeum maltês, Chavín de Huántar, câmaras de Newgrange)

apresentada *como área de pesquisa em debate*, não como consenso. O que é consenso é que a matemática de autofunções do Laplaciano descreve o som nesses espaços tão bem quanto descreve a placa sobre a mesa.

#### 4. Recursos e logística

**Espaço:** 2 m × 2 m (mesa e circulação para 3–4 visitantes simultâneos). **Energia:** 1 tomada 127 V, 15 A. **Equipamentos trazidos pelo proponente:** placa de aço e suporte (M1); subwoofer pequeno e gerador de sinal (M1); tablet de 10 polegadas (M2, M3, M5); tubo acrílico e segundo alto-falante (M4); grânulos e areia. **Equipamentos solicitados à SBM:** um projetor ou monitor ≥ 27" (para repetir a imagem do tablet ao público), mesa com superfície não-reflexiva, estrutura modular para placas expositivas (2 placas A2).

**Cronograma durante os quatro dias da Bienal.** Manhãs: presença do proponente atendendo continuamente (10h–12h). Tardes: visitação livre com estações funcionando autonomamente (14h–17h), mais uma apresentação guiada diária de 20 minutos (16h).

#### 5. Produtos entregues

1. *Cimática na Sala de Aula: quinze experimentos reprodutíveis*, caderno em PT, licença CC BY 4.0. Distribuído gratuitamente na Bienal e publicado em arquivo aberto (Zenodo).
2. Código-fonte aberto do solver de Elementos Finitos (Python + FEniCS) que roda o M5; repositório público com instruções de reprodução.
3. Plano livre (open-hardware) da placa de Chladni física: materiais, preço aproximado em R\$, roteiro de montagem em uma tarde.
4. Registros em vídeo de todas as figuras produzidas por visitantes durante a Bienal — curados no *Painel Vivo* e publicados online ao final do evento.

#### Referências

- Chladni, E.F.F. (1787). *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Weidmanns.
- Rayleigh, J.W.S. (1877). *The Theory of Sound*, vol. 1. Macmillan.
- Courant, R. & Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, cap. V (Problemas de autovalor).
- Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly* **73**, 1–23.
- Gordon, C.; Webb, D.L.; Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the AMS* **27**, 134–138.
- Chavel, I. (1984). *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press.
- Grossi, P.N. (2026). *Helical Attractors on Contact 3-Manifolds — Principia Orthogona Vol. IV*. Zenodo DOI [10.5281/zenodo.19117400](https://doi.org/10.5281/zenodo.19117400).
- Grossi, P.N. (2026). *dm3 Soundworks — interactive Chladni/Binaural/Machines browser suite*. [totogt.github.io/AXLE/impa-portal.html](https://totogt.github.io/AXLE/impa-portal.html).
- Kolar, M.A.; Rick, J.W.; Cook, P.R.; Meier, P.F. (2012). Ancient Pututus Contextualized: Integrative Archaeoacoustics at Chavín de Huántar. In: *Flower World — Music Archaeology of the Americas*, vol. 1.
- Debertolis, P.; Bisconti, N. (2013). Archaeoacoustic analysis of an ancient hypogeum in Italy. In: Eneix, L. (ed.), *Archaeoacoustics*. OTS Foundation. [Apresentado na exposição como literatura de arqueoacústica, não como consenso.]

